

# EINFÜHRUNGSPHASE MATHEMATIK

MitarbeiterInnen:

Marion Dickau, Dieter Friebe, Susanne Ilfrich, Ferdinand Heller,  
Ralph Ostermann, Gottfried Reiß, Giorgio Rossi

Herausgeber:

Manfred Zimmermann

***Vorstellungen sind auch  
ein Leben und eine Welt.***

*G.C. Lichtenberg*

transparent  verlag berlin

\*\*\*\*\*

Im gleichen Verlag sind folgende Bücher für den Zweiten Bildungsweg  
erschienen:

Vorkurs Mathematik (ISBN 3 - 927 055 - 04 – 2)

Grundwissen deutsche Grammatik (ISBN 3 - 927 055 - 00 – X)

Einführung in die literarischen Gattungen (ISBN 3 - 927 055 - 01 – 8)

\*\*\*\*\*

### **Minimalplan für die Einführungsphase der Berliner Kollegs**

1. Aufbau des Zahlensystems bis zum Stand der Sekundarstufe I mit Mengensprechweise und logischen Verknüpfungen
  - Mengen, Teilmengen, Schnittmengen, Vereinigungsmengen, Differenzmengen
  - Aussagen, Aussageformen, Gleichungen, Ungleichungen, Textaufgaben
  - Negation, Implikation, Äquivalenz, Konjunktion, Disjunktion (Die genannten Begriffe sollen im wesentlichen dem Verständnis der Algebra dienen und deshalb auch vor allem in diesem Zusammenhang behandelt werden.
  - Rechnen mit ganzen Zahlen, Brüchen, Potenzen, Wurzeln.
2. Terme und Gleichungen
  - Termumformungen und lineare Gleichungen
  - Lineare Gleichungssysteme mit bis zu drei Variablen,
  - Quadratische Gleichungen,
  - Textaufgaben,
3. Einfache Funktionen
  - Lineare Funktionen, Proportionalität.
  - Ganzrationale Funktionen 2. Grades
  - Einfache gebrochen-rationale Funktionen.
4. Geometrie
  - Elementare Winkelsätze, Flächenberechnungen, jeweils beschränkt auf Dreiecke und Vierecke
  - Satz des Pythagoras
  - Strahlensätze
  - Fläche und Umfang des Kreises.
5. Trigonometrische Funktionen
  - Die Funktionen sin, cos und tan für beliebige Winkel
  - Anwendungen im rechtwinkligen Dreieck.

©

transparent verlag berlin

[www.transparent-verlag.de](http://www.transparent-verlag.de)

Fotos:

Irene Augustin (S.44), Manfred Zimmermann

Zeichnungen:

Olaf Behrendt

Gesamtherstellung:

Keule-Druck, Oranienstr. 188, 10999 Berlin

ISBN 3-927055-03-4

1. Auflage Berlin 1987, 13. Auflage Berlin 2004

## INHALTSVERZEICHNIS

<b>1</b>	<b>GEOMETRIE, WINKELFUNKTIONEN</b>	<b>S.7</b>
1.1	Einführungsbeispiel .....	S.7
1.2	Grundlagen der Geometrie.....	S.9
1.2.1	Winkel.....	S.9
1.2.2	Spezielle Vierecke .....	S.9
1.2.3	Das Dreieck .....	S.10
1.2.4	Der Kreis.....	S.11
1.3	Der Satz des Pythagoras.....	S.13
1.4	Ähnlichkeit .....	S.18
1.5	Trigonometrie .....	S.22
1.6	Fortsetzung von Sinus und Kosinus auf beliebige Winkel.....	S.26
1.7	Zur Geschichte der Geometrie .....	S.31
	<i>Wolfgang Blum: So ähnlich wie ein Ast dem Baum.....</i>	<i>S.33</i>
<b>2</b>	<b>FUNKTIONEN</b>	<b>S.35</b>
2.1	Der mathematische Begriff der Funktion .....	S.35
2.2	Beispiele für Funktionen .....	S.37
2.3	Zur Geschichte der Funktionen und Funktionsgraphen .....	S.42
<b>3</b>	<b>LINEARE FUNKTIONEN</b>	<b>S.44</b>
3.1	Das Koordinatensystem .....	S.44
3.2	Einführungsbeispiele .....	S.45
3.3	Die Geradengleichung.....	S.47
3.3.1	Herleitung der Funktionsgleichung.....	S.47
3.3.2	Die Bedeutung der Parameter m und b.....	S.48
3.3.3	Zusammenhang zwischen Funktionsgleichung und graphischer Darstellung .....	S.51
3.3.4	Bestimmung der Geradengleichung aus zwei gegebenen Punkten .....	S.56
3.4	Nullstellen von Geraden .....	S.59
3.5	Schnittpunkte von zwei Geraden.....	S.61
3.5.1	Schnittpunktberechnung.....	S.61
3.5.2	Schnittpunktberechnung und Gleichungssysteme .....	S.64
3.6	Senkrecht aufeinander stehende Geraden .....	S.66
<b>4</b>	<b>FUNKTIONEN ZWEITEN GRADES</b>	<b>S.69</b>
4.1	Die allgemeine Gleichung einer Funktion zweiten Grades.....	S.69
4.2	Nullstellen von Parabeln.....	S.72
4.3	Die Gauß'sche Produktdarstellung.....	S.76
4.4	Achsensymmetrie zur y-Achse und Scheitelpunkt .....	S.79
4.5	Bestimmung der Funktionsgleichung aus vorgegebenen Eigenschaften	S.83
4.5.1	Bestimmung der Funktionsgleichung aus drei vorgegebenen Punkten	S.83
4.5.2	Bestimmung der Funktionsgleichung aus verschiedenen Eigenschaften.....	S.84
4.6	Schnittpunkte von Geraden und Parabeln .....	S.85

4.7	Die Tangente an die Parabel.....	S.87
4.8	Ausblick .....	S.91
4.9	Beispiel einer E <sub>2</sub> -Klausur .....	S.91
<b>5</b>	<b>GEBROCHEN-RATIONALE FUNKTIONEN</b>	<b>S.93</b>
5.1	Einführungsbeispiel .....	S.93
5.2	Untersuchung einfacher gebrochen-rationaler Funktionen .....	S.96
<b>6</b>	<b>EXPONENTIALFUNKTIONEN UND LOGARITHMEN</b>	<b>S.110</b>
6.1	Exponentialfunktionen .....	S.110
6.1.1	Einführungsbeispiel .....	S.110
6.1.2	Definition und Eigenschaften der Exponentialfunktionen .....	S.112
6.1.3	Anwendungen.....	S.113
6.2	Exponentialgleichungen und Logarithmen .....	S.115
6.2.1	Einführung .....	S.115
6.2.2	Der Logarithmus .....	S.115
6.2.3	Die Basen 10 und e .....	S.116
6.2.4	Logarithmengesetze .....	S.117
<b>7</b>	<b>ERGÄNZUNGEN</b>	<b>S.123</b>
7.1	Grundbegriffe der Mengenlehre .....	S.123
7.2	Zahlenmengen.....	S.129
7.3	Aussagen und Aussagenlogik .....	S.131
7.3.1	Aussagen und Aussageformen .....	S.131
7.3.2	Verknüpfungen von Aussageformen .....	S.133
7.3.3	Implikation und Äquivalenz.....	S.134
7.3.4	„Wahr“ und „Falsch“ in der Mathematik .....	S.136
7.4	Beweisen in der Mathematik .....	S.136
7.5	Winkelmessung im Bogenmaß.....	S.142
7.6	Umwandlung von Dezimalzahlen in Brüche.....	S.143
7.7	Der schiefe Wurf.....	S.144
7.8	Die Scheitelform der Parabel.....	S.145
7.9	Ziele des Mathematikunterrichts in der Geschichte.....	S.148
<b>8</b>	<b>ZUSÄTZLICHE AUFGABEN</b>	<b>S.152</b>
<b>9</b>	<b>LÖSUNGEN</b>	<b>S.165</b>
<b>10</b>	<b>ÜBERSICHT UND FORMELSAMMLUNG</b>	<b>S.186</b>
<b>11</b>	<b>QUELLENANGABEN</b>	<b>S.195</b>
<b>12</b>	<b>REGISTER</b>	<b>S.123</b>

# Vorbemerkungen

## Zur Entstehung des Buches

Mathematik ist in der Erwachsenenbildung ein besonders problematisches Fach, da das Training in mathematischem Denken und der Umgang mit Symbolsprache bei vielen KollegiatInnen lange zurückliegen und Berufs- und Lebenserfahrung in dieses Fach kaum eingebracht werden können. Die meisten Mathematikbücher für Erwachsenenbildung tragen dem nicht Rechnung, sondern stellen Mathematik als System dar, ohne gesellschaftliche Bezüge und ohne Diskussionspunkte, an denen Widersprüche und Grenzen der Mathematik deutlich werden.

Dieses Buch habe ich zusammengestellt aus den Unterrichtseinheiten verschiedener LehrerInnen am Berlin-Kolleg. Ich habe die Sprache und den Aufbau vereinheitlicht und geschichtliche Hintergründe ergänzt, um Mathematik als eine historisch gewachsene Wissenschaft darzustellen, die ihre Wurzeln einerseits in praktischen, andererseits in philosophischen Fragestellungen hat, obwohl das seit dem vorigen Jahrhundert dem herrschenden Selbstverständnis der mathematischen Wissenschaft zuwiderläuft, die sich gerne als rein formal, d.h. auch objektiv, versteht.

Betreibt man Mathematik aus dieser formalen Perspektive, so sind Logik, Präzision, Eindeutigkeit, Strenge und die Suche nach der einen Wahrheit die höchsten Werte. Subjektivität, Emotionalität, Ironie oder gar Selbstironie sind Fremdkörper, und das assoziative Denken wird verlernt. Mein Bestreben ist es hingegen, in Anlehnung an Lichtenberg (1742-1799) und Musil (1880-1942), die beide Mathematiker, Philosophen und Schriftsteller waren, durch die eingestreuten Wörter, Zitate und Fotos Anreize zu diesem assoziativen Denken und ironische Distanz zu schaffen.

## Zum Inhalt

Das Buch ist gedacht als Arbeitsbuch für den Unterricht, aber auch zum selbständigen Üben und Nacharbeiten.

Der von der Schulverwaltung vorgeschriebene „Minimalplan für die Einführungsphase der Berliner Kollegs“ (s. S.2), enthält eine große Stofffülle, die zahlreiche Überschneidungen mit dem Plan für den Vorkurs enthält und auf kein Konzept festlegt.

Um der Konzeptionslosigkeit des „Minimalplans“ entgegenzutreten, wurde der Funktionsbegriff in den Mittelpunkt dieses Buches gestellt, da er zum einen erfahrungsgemäß den KollegiatInnen größere Schwierigkeiten bereitet, zum anderen aber die Grundlage für die folgenden Semester bildet und Verbindungen zwischen den verschiedenen mathematischen Teilgebieten (z.B. Geometrie, Algebra, Analysis, Logik) ermöglicht.

Im Unterschied zur „klassischen“ Vorgehensweise stehen hier die Geometrie und die Winkelfunktionen am Anfang, da sie meiner Meinung nach einen anschaulichen Einstieg in das von vielen als sehr abstrakt empfundene Thema der Funktionen ermöglichen. Diese Vorgehensweise bietet die Möglichkeit für erste Diskussionen über die Wechselbeziehung zwischen Mathematik und Wirklichkeit, z.B. die Anwendungen der Mathematik. Darüber hinaus sind in der Ge-

ometrie relativ einfache Beweisführungen möglich, die an anderer Stelle (z.B. Grenzwertsätze) abstrakter und von daher schwerer nachvollziehbar sind. Dadurch ergibt sich hier die Gelegenheit, den formalen Standpunkt vieler Mathematiker, dass Beweise die „eigentliche“ Mathematik sind, zu diskutieren.

Da die meisten Vorkurse wegen der Stofffülle und den großen Schwierigkeiten, die die Algebra den KollegiatInnen bereitet, die Geometrie weglassen, erfolgt der Einstieg hier möglichst voraussetzungslos, wobei die zahlreichen Aufgaben ein relativ selbständiges Arbeiten der KollegiatInnen ermöglichen.

Im Gegensatz zur Forderung des „Minimalplans“ werden die „Strahlensätze“ in diesem Buch nicht ausdrücklich formuliert, da meines Erachtens alle Anwendungen der Strahlensätze auch über ähnliche Dreiecke gelöst werden können.

Über den Minimalplan hinaus geht das 6. Kapitel (Exponentialfunktionen und Logarithmen). Damit wurde einer Forderung von Physiklern entsprochen, die das Logarithmieren als Rechentechnik für ihren Unterricht benötigen. Aber auch aus mathematischer Sicht bieten sich Exponentialfunktionen wegen ihrer einfachen Form und den zahlreichen Anwendungsmöglichkeiten für die Einführungsphase an.

Im 7. Kapitel sind einige Abschnitte zusammengestellt (Mengenlehre, Zahlbereiche, Logik), die auch vom „Minimalplan“ vorgeschrieben werden, sich aber nicht organisch in den Aufbau einfügen ließen und an jeder Stelle behandelt werden können.

Außerdem enthält dieses Kapitel mögliche Ergänzungen (z.B. Bogenmaß, Scheitelform einer Parabel).

Um unterschiedliche Vorwissen und Lerntempo eventuell auszugleichen, bietet das 8. Kapitel zusätzliche Übungsaufgaben auf verschiedenen Niveaus.

Die Kapitel dieses Buches sind nach Möglichkeit so angelegt, dass sie aufeinander aufbauen, aber auch unabhängig voneinander in anderer Reihenfolge bearbeitet werden können. Dadurch kommt es zu Wiederholungen, die sicher nicht schaden.

Diese Auflage habe ich in Zusammenarbeit mit Ralph Ostermann und Giorgio Rossi gründlich durchgearbeitet, um größere Klarheit und Anschaulichkeit zu erreichen und den unterschiedlichen Charakter der einzelnen Kapitel auszugleichen.

Ich danke den KollegInnen Marion Dickau, Ferdinand Heller, Michael Hofmann, Gerd Juchniki-Franke, Gunter Paul, Irene Stephani, Karin Ullrich und Heinrich Waldmann, die Korrektur gelesen und die Lösungen überprüft haben.

Manfred Zimmermann



## 1. GEOMETRIE, WINKELFUNKTIONEN

### 1.1 Einführungsbeispiel

Ein Beispiel aus der Biologie, bei dem Winkel eine Rolle spielen, ist die Kommunikation der Bienen.

Wie finden die Trachtbienen eine günstige Futterquelle? Stellt man im Freien einen mit Honig getränkten Papierbogen oder ein Schälchen mit Zuckerwasser auf einen Tisch, vergehen unter Umständen einige Stunden, bis die erste Biene diese Futterquelle entdeckt hat. Kurze Zeit, nachdem die erste Biene abgeflogen ist, wächst jedoch die Zahl der anfliegenden Bienen rasch auf Dutzende an.

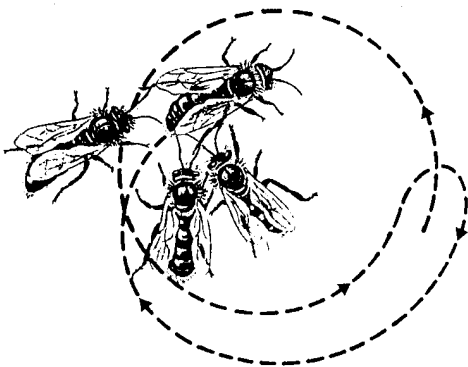


Abb.1 Rundtänze

**Offenbar können sich die Bienen untereinander verständigen.** Um festzustellen, wie dies geschieht, hat v. Frisch die zuerst an einer Futterquelle ankommende Biene mit einem Farbtupfer markiert. Dann wurde das Verhalten der gekennzeichneten Biene nach ihrer Rückkehr in den Stock beobachtet. Lag die Futterquelle in unmittelbarer Nähe des Stocks, so führten die heimkehrenden Sammlerinnen auf einer senkrecht stehenden Wabe einfache **Rundtänze** (s. Abb.1) auf. Wurde das Futterschälchen immer weiter vom Stock entfernt, gingen die Tanzbewegungen bei einer Entfernung von 80 bis 100

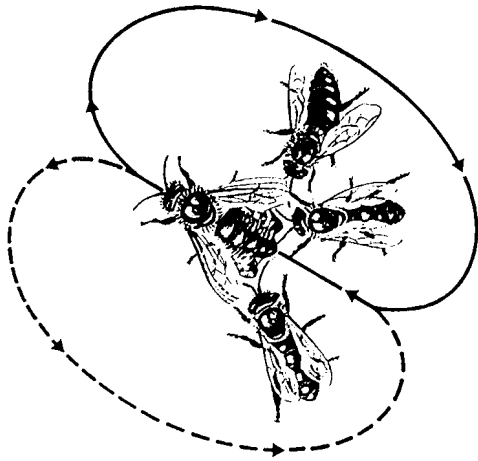


Abb.2 Schwänzeltanz

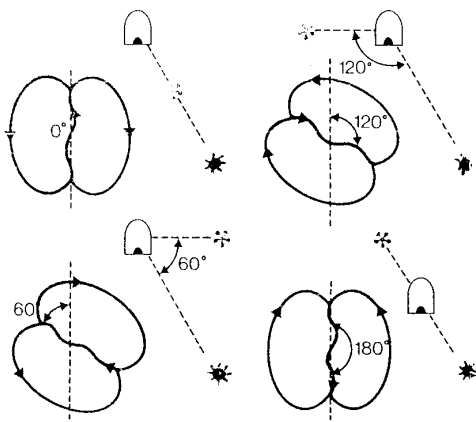


Abb.3 Richtungsanweisung der Bienen nach dem Sonnenstand

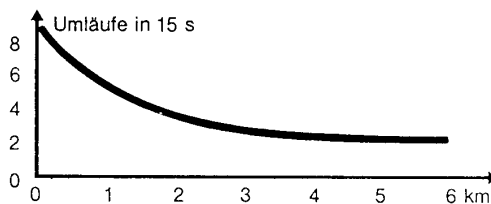


Abb.4 Häufigkeit des Durchlaufens der Tanzfigur pro Zeiteinheit in Abhängigkeit von der Entfernung

Meter in sogenannte **Schwänzeltänze** (s. Abb.2) über. Beim Schwänzeltanz in Form einer Acht betont die Tänzerin das Mittelstück der Tanzfigur und schwänzelt dabei mit dem Hinterleib. Als Bezugsrichtung dient die Richtung gegen die Erdschwerkraft, die im dunklen Stock der Richtung zur Sonne beim Flug entspricht. Die Richtung des Schwänzeltanzes verläuft senkrecht nach oben, wenn die Futterquelle genau in der Richtung des Sonnenstandes liegt. Sie weicht um so viele Winkelgrade von der Senkrechten ab, wie der Winkelabstand zwischen der Richtung zur Futterquelle und dem jeweiligen Sonnenstand beträgt (s. Abb.3). Mit zunehmender Entfernung zur Futterquelle werden die Umläufe langsamer, der Schwänzellauf des Mittelstücks aber immer ausgeprägter (s. Abb.4). Die Zahl der Umläufe je Zeiteinheit scheint also eine Entfernungsangabe zu sein. Liegt die Futterquelle bei gleicher Entfernung vom Stock das eine Mal bergauf, das andere Mal bergab, ist die Zahl der Umläufe je Zeiteinheit beim Bergaufflug kleiner als beim Bergabflug. Es wird also nicht die absolute Entfernung, sondern die Flugleistung bis zum Erreichen des Zieles angegeben. Ähnliche Verhältnisse wurden auch bei Gegenwind beobachtet. Bei Umwegen um einen Berg wird stets die Richtung der Luftlinie zur Trachtquelle angegeben, aber die Umwegstrecke als Entfernung angezeigt. Auch wenn die Sonne verdeckt ist und nur ein kleiner Fleck blauen Himmels sichtbar bleibt, können die Bienen aus der Schwingungsrichtung des polarisierten Himmelslichtes den Sonnenstand erkennen. Da ihr Auge für ultraviolettes Licht sehr empfänglich ist, können sie auch bei geschlossener Wolkendecke die Sonne direkt sehen. Bienen berücksichtigen bei dieser

Richtungsweisung auch die Änderung des Sonnenstandes, die mit dem Zeitablauf eintritt; sie haben einen guten Zeitsinn.

Die Art des Tanzes enthält noch zusätzliche Informationen über die Menge des Futters und seine Entfernung vom Stock; der Duft der Tracht enthält Informationen über die Art der Futterpflanze. Stockgenossen übernehmen die Information der Tanzsprache, indem sie der tanzenden Biene dichtauf folgen.

Da die Biene auf der senkrecht hängenden Wabe tanzt, muss sie die Information über den Winkel zwischen Sonne und Flugrichtung in den Winkel zwischen der Lotrechten und der Tanzrichtung übersetzen, und die Empfängerbienen müssen diese Information ihrerseits wieder zurückübersetzen - eine bemerkenswerte Leistung.

(Aus: Linder, Hermann: Biologie

**Über dem Eingangstor zu Platons Akademie stand:  
„Eintritt für Nichtgeometer verboten“**

## 1.2 Grundlagen der Geometrie

Dieser Abschnitt stellt einige Definitionen und Formeln der Mittelstufengeometrie auf der Grundlage der Euklidischen Geometrie (um 300 v.u.Z.) zusammen.

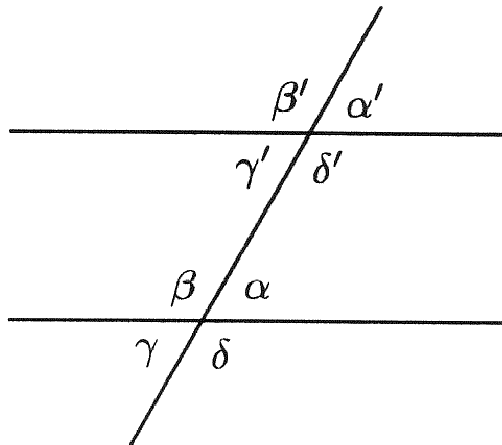
### 1.2.1 Winkel

Zwei von einem Punkt (Scheitel) ausgehende Halbgeraden (Schenkel) bilden einen Winkel. In der vorgriechischen Geometrie wurde als Maß für Winkel ein Seitenverhältnis (unser heutiger Tangens) oder die Bogenlänge (s. 7. Kapitel S.142) genommen. Seit Thales von Milet (um 600 v.u.Z.) werden sie normalerweise in Grad ( $^{\circ}$ ) gemessen. Ein Vollkreis hat  $360^{\circ}$ , ein Viertelkreis  $90^{\circ}$ . Dies geht auf das mesopotamische Sechzigersystem zurück. Auf dem Taschenrechner wird diese Gradmessung mit DEG angezeigt. Daneben gibt es noch die Bezeichnung GRAD. Das ist eine andere Gradmessung, bei der dem rechten Winkel ( $90^{\circ}$ ) 100 GRAD entsprechen. Diese Maßeinheit hat sich aber nicht durchgesetzt. Außerdem wird mit RAD das Bogenmaß bezeichnet.

Winkel im Gradmaß werden i.a. mit griechischen Buchstaben bezeichnet:  
 $\alpha$  (alpha),  $\beta$  (beta),  $\gamma$  (gamma),  $\delta$  (delta).

Bezeichnung von Winkeln  $\alpha$ :

$0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$ : spitze Winkel ;  $\alpha = 90^{\circ}$ : rechter Winkel ;  $90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$ : stumpfe Winkel



#### Stufenwinkelsatz:

Werden zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten, so entstehen zwei Geradenkreuzungen. Dabei sind alle spitzen (und auch alle stumpfen) Winkel gleich groß.

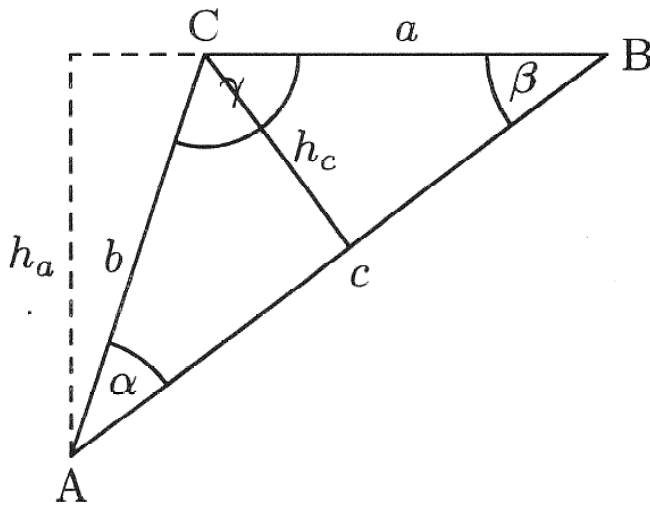
$$\alpha = \alpha' = \gamma = \gamma'$$
$$\beta = \beta' = \delta = \delta'$$

### 1.2.2 Spezielle Vierecke

RECHTECK (Seiten: a,b)	Fläche: $A = a \cdot b$
	Umfang: $U = 2(a + b)$
QUADRAT (Seite: a)	Fläche: $A = a^2$
	Umfang: $U = 4a$

### 1.2.3 Das Dreieck

#### BELIEBIGES DREIECK:



Ein Dreieck hat drei Seiten (a,b,c), drei Eckpunkte (A,B,C) und drei Winkel ( $\alpha, \beta, \gamma$ ).

Die Bezeichnung erfolgt entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn. Gegenüberliegende Seiten und Ecken werden mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet. Die Höhen können (wie in der Abbildung  $h_c$ ) auch außerhalb des Dreiecks liegen.

Die Summe der Innenwinkel im beliebigen Dreieck beträgt in der euklidischen Geometrie  $180^\circ$ .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz mit Hilfe des Stufenwinkelsatzes (s.o.)

Umfang:  $U = a + b + c$

Fläche:  $g$ : Grundseite (a,b,c),  $h$ : zugehörige Höhe

$$A = \frac{1}{2} g \cdot h \quad \text{zum Beispiel :} \quad A = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

#### SPEZIELLE DREIECKE:

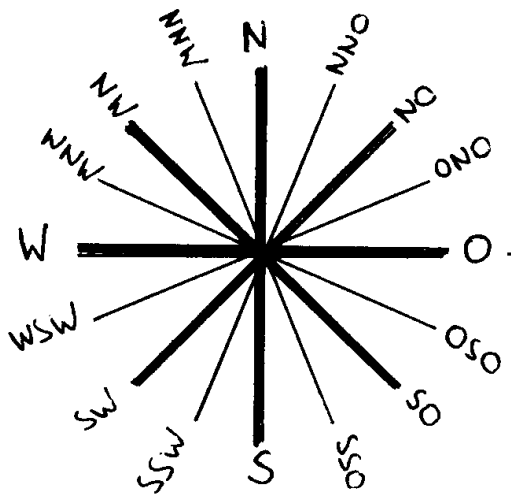
**GLEICHSCHENKLIGES DREIECK:** Zwei Seiten sind gleich (z.B.  $a=b$ ), dann sind auch zwei Winkel gleich (dann also  $\alpha = \beta$ ). Die beiden gleichen Seiten nennt man Schenkel, die dritte Basis.

**GLEICHSEITIGES DREIECK:** Alle drei Seiten sind gleich ( $a = b = c$ ), dann sind auch alle drei Winkel gleich ( $\alpha = \beta = \gamma$ ).

**RECHTWINKLIGES DREIECK:** Ein Winkel hat  $90^\circ$ .  
Sind keine weiteren Angaben gemacht, so bezeichnet man den rechten Winkel mit  $\gamma$ .  
Die Schenkel des rechten Winkels (also die Seiten, die an dem rechten Winkel anliegen) nennt man **Katheten** (griechisch: senkrechte Linie), die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite nennt man **Hypotenuse** (griechisch: die sich darunter hinziehende Linie).



Richtung	N - O	NO – SO	NW - S	WNW - SO
Winkel				



5) In einem rechtwinkligen Dreieck sei  $\alpha$  doppelt so groß wie  $\beta$ . Wie groß sind die Winkel?

6) In einem Dreieck ist  $\alpha$  um  $50^\circ$  größer und  $\beta$  um  $20^\circ$  kleiner als  $\gamma$ . Wie groß ist  $\gamma$ ?

7) In einem Dreieck ist  $\beta$  um  $20^\circ$  größer und  $\gamma$  doppelt so groß wie  $\alpha$ . Wie groß sind die drei Winkel?

8) Verwandeln Sie ein Quadrat mit  $a = 4$  cm in ein anderes flächengleiches Rechteck mit der Seite  $b = 8$  cm. Wie groß ist die zweite Rechteckseite?

9) Berechnen Sie Umfang und Fläche des Kreises mit dem Durchmesser  $d_1 = 6$  cm bzw.  $d_2 = 8$  mm.

10) Berechnen Sie Radius und Flächeninhalt des Kreises mit dem Umfang  $U_1 = 9$  cm bzw.  $U_2 = 1$  km.

11) Verwandeln Sie das Quadrat mit  $a = 3$  cm in ein Rechteck mit gleichem Umfang und einer Seite von 5 cm. Warum unterscheiden sich die Flächen der beiden Figuren?

12) In einem Dreieck ist  $\alpha = 56^\circ$  und  $\beta$  um  $42^\circ$  größer als  $\gamma$ . Wie groß sind  $\beta$  und  $\gamma$ ?

13) Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks ist 39 cm. Ein Schenkel ist um 6 cm größer als die Basis.

\*\*\*\*\*  
**WIEDERHOLUNGS-AUFGABEN ZU GLEICHUNGEN**  
 \*\*\*\*\*

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

1)  $17 = 5 - 4x$

2)  $5(x - 10) + 10 = 4x$

3)  $5(x - a) + 8a = 2x$

4)  $(m - 4)x - 5n + 7 = 0$

5)  $5(x + b) = 8bx$

6)  $ax - b = d - cx$

7)  $ax + 2m - n = m + bx$

8)  $(x + 1)(x + 5) = (x + 2)(x + 3)$

9) Multipliziert man eine Zahl mit 3 und subtrahiert vom Produkt 16, so erhält man das gleiche, als wenn man das 5fache der Zahl um 8 vermehrt.

Anmerkung: Warum in der Mathematik für die unbekannte Größe der Buchstabe  $x$  benutzt wird:

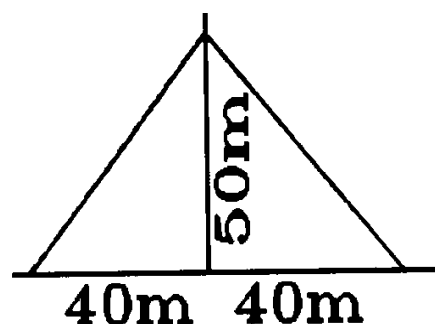
Die arabischen Mathematiker nannten eine unbekannte Größe šai' (= Sache); diese Form wurde durch  $s$  abgekürzt. Die Araber hielten sich von 711 - 1492 auch auf der iberischen Halbinsel auf („Heiliger Krieg“). Die Spanier, die damals ihr  $x$  wie  $s$  aussprachen, schrieben demnach  $x$  für  $s$ . Daran knüpfte René Descartes (französischer Mathematiker und Philosoph, 1596-1650) die Reihe  $x,y,z$ , woraus Ausdrücke wie  $x$ -mal, zum  $x$ -ten Mal,  $x$ -beliebig entstanden sind. In der Mathematik schreibt man für unbekannte Größen die Buchstaben  $x,y,z$ .

Quelle: Kleines Lexikon deutscher Wörter arabischer Herkunft. Hrsg. Nabil Osman. Verlag C.H. Beck. München 1982.

### 1.3 Der Satz des Pythagoras

Beispiel: Um einen Sendemast zu befestigen, werden Stahlseile in 50 m Höhe am Mast angebracht und in 40 m Entfernung vom Fuß des Mastes verankert. Wie lang müssen die Seile in gespanntem Zustand sein?

Mathematisch betrachtet handelt es sich um folgendes Problem: In einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die beiden Seiten, die den rechten Winkel einschließen (die Katheten); kann man daraus die Länge der dritten Seite (Hypotenuse) berechnen?



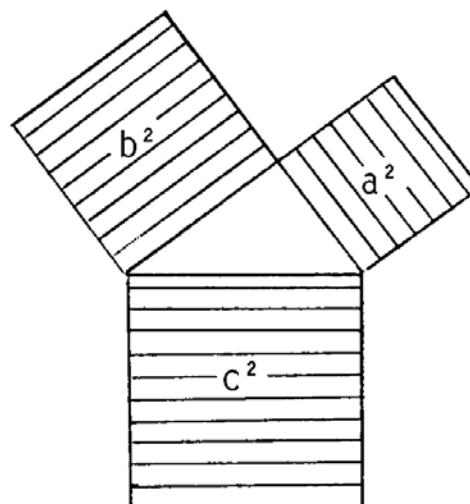
#### SATZ DES PYTHAGORAS

In jedem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse.

Anders ausgedrückt:

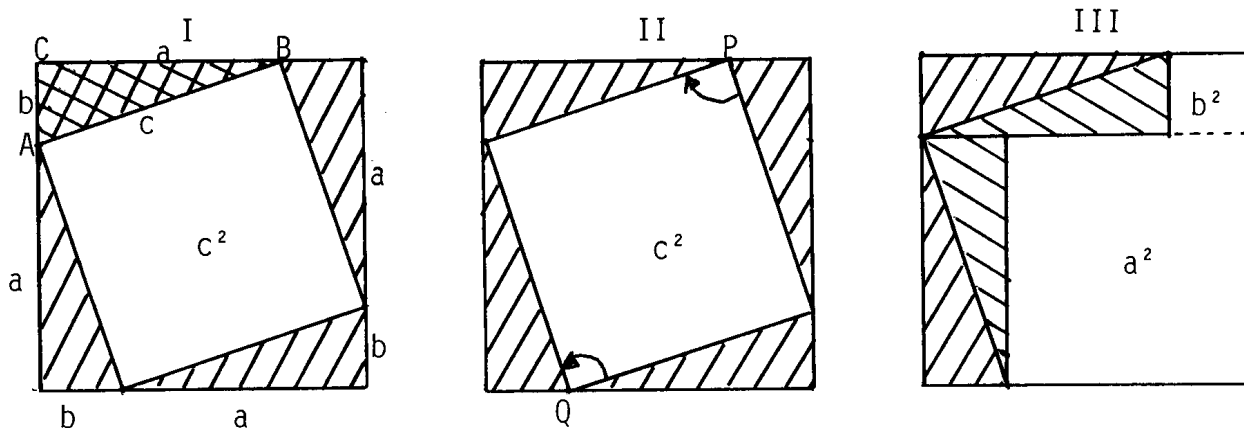
Sind  $a$  und  $b$  die Längen der Katheten und ist  $c$  die Länge der Hypotenuse (gemessen in der gleichen Längeneinheit), so gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Für den Satz des Pythagoras sind ca. 170 geometrische und 60 algebraische Beweise bekannt. Die meisten beruhen auf dem geometrischen oder rechnerischen Vergleich von Flächen (wie die beiden folgenden).

1. Ein geometrischer Beweis (aus Indien):

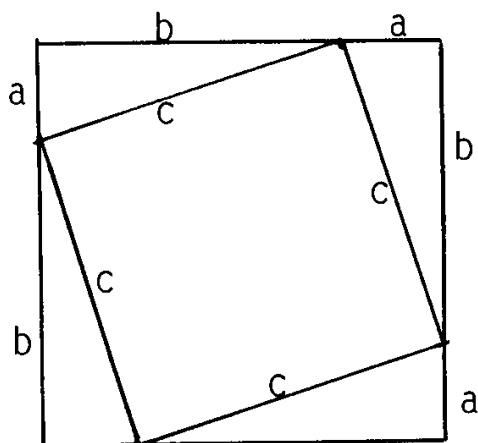


I. Das Quadrat  $c^2$  wird durch vier gleiche rechtwinklige Dreiecke ergänzt.

II. Das Dreieck oben rechts wird im angegebenen Sinn um P gedreht; das Dreieck unten rechts um Q.

III. Durch Vergleich der Figur III mit der Figur I erkennt man:  
 $c^2 = a^2 + b^2$

2. Ein algebraischer Beweis:



Die Fläche des großen Quadrates kann auf zwei

$$1) A = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

verschiedene Weisen berechnet werden:  
(1. binomische Formel)

$$2) A = c^2 + 4 \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab$$

(Fläche des inneren Quadrates plus viermal die Dreiecksfläche)

Da beide Formeln dieselbe Fläche beschreiben, gilt:

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \quad | - 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Beispiel: Berechnung der Seillänge auf S.13

Kennt man in einem rechtwinkligen Dreieck die Längen der Katheten ( $a = 50 \text{ m}$ ,  $b = 40 \text{ m}$ ), dann gilt für die Hypotenuse  $c$ :

$$c^2 = a^2 + b^2 = 50^2 + 40^2 = 2.500 + 1.600 = 4.100 \quad \text{und } c \approx 64 \text{ m}$$

Die Seile müssen in gespanntem Zustand etwa 64 m lang sein.

Auch die Umkehrung zum Satz des Pythagoras gilt:

Wenn in einem beliebigen Dreieck mit den Seiten  $a, b, c$  gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

dann hat das Dreieck gegenüber von der Seite  $c$  einen rechten Winkel.