INHALTSVERZEICHNIS

Rahmenplan für den Vorkurs:

- Rechnen mit ganzen Zahlen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division),
- Rechnen mit Brüchen (Erweitern, Kürzen, Grundrechenarten),
- Rechnen mit Potenzen und Wurzeln, Binomische Formeln,
- Termumformungen, insbesondere Ausmultiplizieren, Ausklammern, Vorzeichenregeln,
- Lösen linearer Gleichungen, Anwendung bei Textaufgaben,
- Lösen linearer Gleichungssysteme mit 2 Variablen, Anwendung auf Textaufgaben,
- Lösen quadratischer Gleichungen, Produkt von Linearfaktoren, Satz von Vieta, quadratische Ergänzung, Umgang mit Lösungsformeln, Anwendung auf Textaufgaben,
- Geometrie: Elementare Winkelsätze, Flächenberechnungen (für Dreiecke, Vierecke), Satz des Pythagoras, Strahlensätze, Fläche und Umfang des Kreises.

Vorwort

Dieses Buch entstand parallel zum Unterricht im Vorkurs am Berlin-Kolleg, der auf den Kollegbesuch vorbereitet und die Aufnahmeprüfung ersetzt. Er soll Erwachsene, deren Schulerfahrungen lange zurückliegen, wieder mit den Grundkenntnissen in Mathematik vertraut zu machen. Der Inhalt umfasst im wesentlichen den Stoff der Mittleren Reife.
Das Buch soll zur Begleitung des Unterrichts, zum selbstständigen Üben und zur eigenständigen Vorbereitung auf die Aufnahmeprüfung dienen.
Die Inhalte orientieren sich mit zwei Ausnahmen am Rahmenplan:
a) Die Geometrie wurde hier weggelassen, weil der gleiche Stoff im Rahmenplan der Einführungsphase steht, sie aus Zeitgründen in fast keinem Vorkurs an den Berliner Kollegs behandelt wurde und die gründliche Wiederholung und Festigung der Algebra im Vorkurs für den weiteren Unterricht notwendiger ist. Geometrie wird auch nicht mehr in der Aufnahmeprüfung verlangt.
b) Über den Plan hinaus geht das 4. Kapitel mit der Einführung des Funktionsbegriffs, weil der Zusammenhang der vorangegangenen Gebiete deutlich gemacht und eine Möglichkeit zur geometrischen Veranschaulichung der Gleichungen mit zwei Unbekannten gegeben werden sollte.
Obwohl sich die Grundlagen der Wissenschaft (auch der Mathematik) immer wieder radikal änderten, erscheint Mathematik an Schule und Hochschule immer noch als ein starres System, als Lern-, nicht als Diskussionsfach, das die kritische Reflexion als fachfremd ausgrenzt. Aufgrund ihrer gesellschaftlichen Anerkennung kann sich die Mathematik die Arroganz leisten, Grundlagenfragen, das Fragmentarische und Widersprüchliche auszuklammern und anderen Wissenschaften (Soziologie, Wissenschaftsgeschichte, Philosophie u.a.) zu überlassen und den Schein von Objektivität, Eindeutigkeit und „ewiger Wahrheit“ zu erwecken. Um den damit verbundenen Strukturen autoritären Denkens sowie dem stupiden Einüben von geistiger Disziplin und Drill (s. Lichtenberg S.124) entgegenzutreten, wurden Texte verschiedener Art in das Buch aufgenommen. Zum Beispiel wird in Musils „Die Verwirrungen des Zöglings Törleß“, (s. S.64), ein Verhalten eines Mathematiklehrers gegenüber grundlegenden Fragen seiner Schüler beschrieben, wie es auch heute noch vorkommen soll. Kritisches Hinterfragen eines Fachs (z.B. zum Verhältnis von Wirklichkeit und Mathematik) ist nicht Ausdruck persönlichen Versagens, sondern notwendiger Bestandteil einer Wissenschaft.

Ich danke den folgenden KollegInnen für ihre Kritik, ihre Anregungen und Beiträge:
Susanne Ilfrich: Variablen, Zehnerpotenzen, große und kleine Zahlen,
Mechthild Pape: Prozentrechnung,
Ralph Ostermann: Quadratische Gleichungen, Prozentrechnung, Harmonielehre.

Für die Richtigkeit der Lösungen im Anhang übernehme ich keine Gewähr und bin für alle Korrekturen und Verbesserungsvorschläge dankbar.

Biographische Angaben zu Lichtenberg und Musil:

Lichtenberg und Musil waren Mathematiker, die vor allem als Schriftsteller berühmt wurden. Beide haben einen sehr eigenwilligen, ironischen Stil entwickelt, in dem sich ihre Lust an Präzision und Widersprüchen (z.B. von Vernunft und Gefühl), Menschenliebe, Skeptizismus und eine böse Zunge äußern.

LICHTENBERG, Georg Christoph *(* 1742 bei Darmstadt + 1799 in Göttingen).*
Lichtenberg war das 18. Kind eines Generalsuperintendenten. Infolge eines Sturzes blieb er von Kindheit an verwachsen. Er studierte Mathematik, Physik und Astronomie in Göttingen, wo er 1770 Professor für Experimentalphysik wurde. Er entdeckte die „Lichtenbergschen elektrischen Figuren". 1795 wurde er in die Petersburger Akademie der Wissenschaften aufgenommen. Er war einer der bedeutenden Schriftsteller der deutschen Aufklärung, an keine literarische Richtung gebunden. Sein Ruf beruht auf naturwissenschaftlichen und philosophischen Aufsätzen (Streitschriften gegen Lavater und Kant), besonders auf seinen scharfsinnigen „Aphorismen" (1777-1799), seinen ab 1764 geführten Tagebüchern („Sudelbücher") und seinen satirischen Aufsätzen. In ihnen bekämpfte er vor allem den übertriebenen Geniekult des Sturm und Drangs und die religiöse Intoleranz. Mit seinen „Briefen aus London" begründete er die Reiseliteratur (Vorbild für Heinrich Heine). Sein Werk ist ein mosaikhaftes Fragment, das einen guten Aufschluss über Hauptfragen und Widersprüche seiner Zeit gibt. Mit seinem Buch „Ausführliche Erklärung der Hogarthischen Kupferstiche" (1794/99) hatte er großen Einfluss auf die deutsche Kunstkritik. Lichtenberg begrüßte die Französische Revolution, wenn er sich auch von deren Gewaltmaßnahmen distanzierte.

MUSIL, Robert *(*1880 in Klagenfurt, + 1942 in Genf)*
Musil entstammt einer altösterreichischen Beamten-, Offiziers- und Gelehrtenfamilie. Er sollte Offizier werden, studierte dann aber Maschinenbau, Philosophie, Physik und Mathematik. Er arbeitete als Bibliothekar, Redakteur, Ministerialbeamter, Theaterkritiker und freischaffender Schriftsteller. 1938 emigrierte er über Italien in die Schweiz, wo er einsam und fast mittellos an einem Gehirnschlag starb. Ersten Erfolg hatte er mit dem Roman „Die Verwirrungen des Zöglings Törleß" (1906). Im Grunde lebte er aber nur für die Vollendung seines Hauptwerkes „Der Mann ohne Eigenschaften" (1930-1943). Der Versuch, den kulturellen Niedergang der altösterreichischen Welt als Beispiel für den allgemeinen Verlust eines Gesamtweltbildes mit den Mitteln des Essayisten, des analytischen Satirikers und des ironischen Kritikers episch darzustellen, endete konsequent im Fragment. Merkmale des Romans sind der Wille zu Rationalität und Exaktheit und eine besondere - desillusionierende - Art des eindeutig-vieldeutigen ironischen Stils voller Anspielungen und Konjunktive. Das formal zerfließende, aber sprachlich sehr ausgefeilte Werk weist im Zerbrechen des deterministischen und kausalen Denkens Analogien zur Relativitätstheorie und der Quantenphysik und zu den „koexistierenden Möglichkeiten" Heisenbergs auf.

1 DIE GRUNDRECHENARTEN

1.1 DAS ZÄHLEN

*Rechnen ist darum überhaupt zählen. (*Hegel, Enzyklopädie, 1830, S.118)

Die größte Freude der Wasungen aber ist das Zählen. Du, sie sind wirklich der Meinung, dass zehn Hütten zehn Hütten seien und können sich nicht vorstellen, dass wir Kitara es für unanständig halten zu zählen, wie viel Hütten dastehen oder wie viel Körbe Matama (Negerhirse) geerntet werden. Ich erinnere Dich an das Gespräch, das Du mit dem Sungu (Weißen) hattest, der Dich besuchte. Der Sungu schrieb in sein Buch und sagte: „Hier stehen also zehn Hütten." Du sagtest ganz erschrocken: „Zehn? Nein, Herr, einige; vielleicht viele." Da ging der Sungu hinaus und zeigte mit dem Finger auf jede Hütte und sagte laut: „Eins, zwei, drei...". Als dies die Umstehenden hörten, packte sie ein Entsetzen, sie liefen davon und jammerten und opferten in ihren Hütten. Das brachte den Narren zum Glück davon ab, zu Ende zu zählen. Erschrocken sagte er zu Dir: „Sind es denn nicht zehn?" Du erbleichtest, batest ihn, auf dem Schemel niederzusitzen, der aus einem Stück Holz geschnitzt war, und sagtest: „Herr, eine Hütte ist zum Wohnen da; weiß man von außen, ob sie leer steht? Oder, wenn Menschen darin wohnen, ob mit ihnen das Glück dort wohnt? Auch ist es eigentlich keine Hütte, denn die Wahutu haben Stangen aus dem Kabegewald geholt und trockenes Gras von den Bergen, wo keine Rinder weiden, und das nennst Du, wenn es dort steht, eine Hütte. Aber es kann abbrennen, und dann ist es nicht mehr da oder der Bewohner wird auf den Bergen beim Hüten der Rinder verwundet und kann nicht heim, dann ist es für ihn keine Hütte. Deshalb ist es ein Irrtum, wenn Du die Hütten zählst."

Aus: Hans Paasche: Die Forschungsreise des Afrikaners Lukanga Mukara ins Innerste Deutschlands. Packpapier Nr. 7. S.63 f.

Ernst Jandl	*tür auf*	*tür auf*
(geb.1925)	*einer raus*	*einer raus*
	einer rein	*einer rein*
fünfter sein	*dritter sein*	*nächster sein*
tür auf	*tür auf*	*tür auf*
einer raus	*einer raus*	*einer raus*
einer rein	*einer rein*	*selber rein*
vierter sein	*zweiter sein.*	*tagherrdoktor*

Die **NATÜRLICHEN ZAHLEN** (positive ganze Zahlen) entstanden aus dem Abzählen:

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ...

Um zählen zu können, musste man zunächst lernen, von allen Eigenschaften zu abstrahieren außer von der Anzahl. Zunächst sah man die Zahl als Eigenschaft an, die zu den Objekten gehörte, und zählte z.B.:

Einhaus, Zweihäuser, Dreihäuser

Einhaus war etwas anderes als Einbaum.

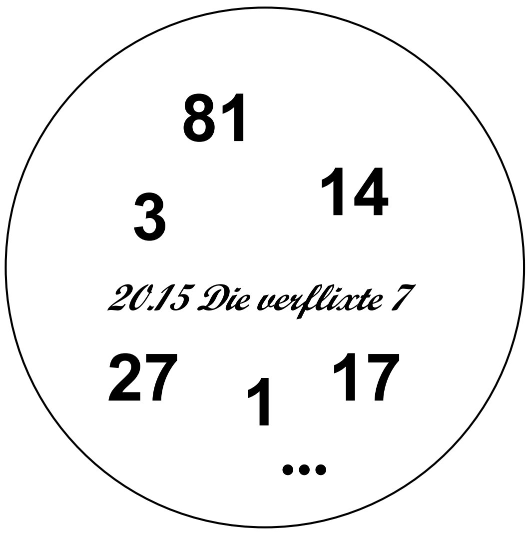
das zählt

Die Zahl ist ein unsinnlicher Gegenstand, und die Beschäftigung mit ihr und ihren Verbindungen ist ein unsinnliches Geschäft. Hegel, Logik, S.212

Vor allem die Zahl Eins bereitete viele Schwierigkeiten. Sie wurde in der griechischen Antike (Aristoteles, Pythagoras) und auch noch im Mittelalter nicht als Zahl angesehen, sondern als Quelle aller Zahlen und Symbol der Vernunft.
„Die Eins ist keine Zahl." (Aristoteles: Metaphysik N1 = 1088 a 6)
„Unitas non est numerus, sed principium numeri." (Mittelalter)

Die natürlichen Zahlen sind später (durch Peano (1858-1932) rein formal charakterisiert worden:

- Jede Zahl hat einen Nachfolger (d.h. es gibt keine größte natürliche Zahl, es gibt unendlich viele natürliche Zahlen).
- Außer 1 hat jede Zahl einen Vorgänger (d.h. 1 ist die kleinste natürliche Zahl, sie ist die Einheit der natürlichen Zahlen).



Menge der natürlichen Zahlen

Der früheren Schreibweise der Zahlen sah man ihre Herkunft aus dem Zählen noch deutlicher an:

ADDITIVE SCHREIBWEISE DER ZAHLEN:
Römische Zahlen: I II III IV V VI VII VIII
Das Weiterzählen wird durch einen zusätzlichen Strich deutlich gemacht. Diese Schreibweise ist aber für komplizierte Rechnungen und z.B. bei der Angabe von Dezimalzahlen (mit Stellen hinter dem Komma) zu umständlich.

Null-Runde

Sinnvoller ist das heute übliche STELLENWERTSYSTEM: Es wird aus den zehn arabischen Ziffern 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 gebildet. Dabei haben die Ziffern unterschiedliche Bedeutung, je nachdem auf welchem Platz sie stehen.

1 steht in 15 für 10, in 12.472 für 10.000.
Ausführlicher geschrieben: 15 = 1•10 + 5•1.

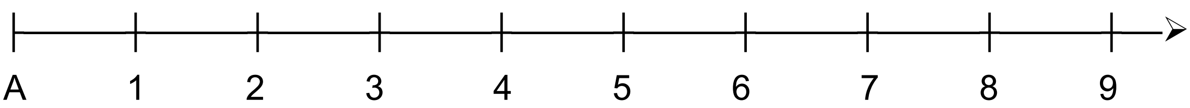
Die Zahl 101 wurde vor Erfindung der Null 1 1 geschrieben oder später 1.1. Beide Schreibweisen führten aber zu Verwechslungen.

Während die natürlichen Zahlen bereits im 14. Jhd vor unserer Zeitrechnung bekannt waren, wurde die NULL zum ersten Mal im 8. Jahrhundert von dem indischen Astronomen Gautama Siddharta verwendet.

Weiteres zur Geschichte der Zahlen s.S.105.

0-Bock, was

Da die natürlichen Zahlen geordnet sind, d.h. jeweils eine kleiner oder größer als die andere ist, kann man sie auf einer Linie anordnen.
Man markiert zunächst einen Anfangspunkt A und die Einheit 1, dann ist für jede Zahl ein Platz auf dem ZAHLENSTRAHL festgelegt.



Für die Ordnung führt man folgende Schreibweise ein:
3 < 4 (3 ist kleiner als 4)
4 > 3 (4 ist größer als 3)

eins zwei drei *Rrrutsch*
mir den Puckel lang *Puckel lang*

„Ich will nicht länger auf jemanden zählen, sondern mit jemandem"

13

Auch die „13" als zweites Element des abergläubisch besetzten Datums besitzt nicht nur eine schematische Unglücksbedeutung. Im Alten Testament galt sie als Glückszahl. Bei den Babyloniern hingegen war sie die Zahl der Unterwelt, die Zerstörerin des Vollkommenen.

Diese Ambivalenz ragt bis ins 20. Jahrhundert herein. 1925 berichtete eine Zeitschrift, dass bei Autorennen in den USA keine Startnummer 13 mehr ausgegeben wurde; dies war auf Anregung der französischen Regierung angeordnet worden, weil die Renner mit der Nr. 13 zuvor mehrfach tödlich verunglückt waren. Ein Jahr später berichtete dieselbe Zeitschrift hingegen, dass der Flieger Mario de Benardi die berüchtigte Zahl als Glücksbringer verehrte und gleichzeitig zum Fetisch erhob: er reiste am 13. des Monats mit 13 Mann für den amerikanischen Flugrekord ab; dieser gelang ihm an einem 13., wobei sein Flugapparat die Nr. 13 trug, ebenso wie sein Auto und sein Hotelzimmer.

Die böse Dreizehn

Dennoch dominiert in der ganzen Welt der Unglücksaberglauben. So fehlt in Italien die Verwendung der 13 in den Lotterien, in Frankreich die Hausnummer; auf Nr. 12 folgt 12 1/2, und *dann gleich die 14. Bei manchen Wolkenkratzern in den USA wird das 13. Stockwerk nicht als solches gezählt, und manche Fluggesellschaften führen keinen Sitz Nr. 13.*

Von Anfang an haben die Menschen in den Zahlen einen tieferen Sinn mit einer magischen und mythischen Bedeutung gesehen, wähnten sie erfüllt mit einer geheimen Kraft. Schon bei dem als Begründer der Mathematik geltenden Griechen Pythagoras (580 bis 500 v.u.Z.) spielten Zahlen eine symbolische Rolle, wie auch in der Kabbala, der mündlichen Überlieferung der Vorschriften des Judentums, wo sie als Glückszahl gefeiert wird.

Zahlen entstehen, so der Logiker Christoph v. Sigwart (1830-1904), wenn wir Gleiches räumlich und zeitlich unterscheiden und es uns als Wiederholung derselben Anschauung bewusst machen. So erscheint die Zahl als ein Urgebilde, eine Grunderfahrung des Denkens, die uns hilft, die Dinge in Ordnung zu halten.

Sieht man allerdings, in welcher (Selbst-) Suggestion mit der 13 umgegangen wird, dünkt einen eher das Gegenteil. Sie ist zweifellos die bekannteste und am meisten abergläubisch belastete Zahl. Furcht vor ihr ist schon in vorchristlicher Zeit in der nordischen Mythologie zu finden. Sie rührte von der Sage eines Göttermahls in Walhall her, zu dem 12 Götter geladen waren. Ein dreizehnter, der Unruhestifter Loki, kam hinzu, brachte das Unglück mit, so dass Balder, der Liebling der Götter, sterben musste.

Das Christentum bestätigte in der Überfrachtung der heidnischen Glaubensvorstellungen den Unglückscharakter. Denn beim letzten Abendmahl waren mit Jesus und seinen 12 Jüngern 13 anwesend gewesen. Da es das letzte Mal vor seiner Kreuzigung war, wurde die Zahl 13 als Omen für Unglück und Tod bestätigt.

Wenn heute die mehr oder weniger einheitlichen Überzeugungen von ihren Unglücksbedeutungen zunehmend am Zerfallen sind, so provoziert die Zahl 13 nach wie vor eine Stellungnahme, ob negativ oder positiv.

Diese Wirkung entfaltet sie als eine jener Zahlen, die ein geschlossenes System überschreiten. Das Dutzend war eine runde Zahl, was sich u.a. in den 12 Tierkreisen, den 12 Monaten des Jahres, den 12 Mitgliedern einer geistlichen und profanen Gemeinschaft ausdrückt.

*Als etwas, das die Geschlossenheit eines Systems überschreitet, kann die Zahl 13 als überwindende Kraft verstanden werden, und so ist ihr Ursprung möglicherweise bedeutender als alle Mythologie, die ihr anhaftet. So gewinnt sie ihre Ausstrahlung aus dem Ringen um ein mathematisches Kräftegefühl von Ordnung und Unordnung, das in die Mythologie hinein sich verlängerte. In ihrem überwindenden Charakter aber verkörpert sich gewissermaßen auch die Hybris, der frevelhafte Übermut, der den Keim der Strafe schon in sich trägt. Und die fürchteten die Reichen vergangener Jahrhunderte teilweise so sehr, dass sie - sollten sich zufällig 13 Gäste an der Tafel einfinden - immer einen Reservemann zum Ausgleichen bereithielten. Alle abergläubischen Vorstellungen setzten in ihren Anfängen immer einen direkten, bewussten Zusammenhang zu den ihnen zugrundeliegenden beobachteten Tatsachen voraus - und sie tun es auch heute noch, so sich Aberglauben bildet. Als Vorstellungen von gewissen Ereignissen und Erscheinungen fest geworden, pflanzten sich diese fort, wobei sich mit der Zeit zunehmend der ursprüngliche Zusammenhang verlor. Gedächtnisfehler, Vermischungen und logische Erwägungen taten ein Übriges, um in der Folge Aberglauben zu verwandeln. (*Helmut Maier in der taz)

Es gibt keinen Unterschied zwischen Menschen und Tieren außer dass sie zählen können und niemals hat es so viel Zählen gegeben wie gegenwärtig.

Jedermann zählt, zählen ist jedermanns Beschäftigung. Und weil jeder Mensch sich sicher ist dass darin der Unterschied liegt der Menschen zu Menschen macht und da jeder sicher sein will dass Menschen Menschen sind, braucht er es als Bestätigung und jedermann zählt. Ich habe immer gern gezählt aber ich zählte gerne eins zwei drei vier fünf sechs sieben oder ein kleiner Indianer zwei kleine Indianer drei kleine Indianerjungen, mehr als bis zehn zählen ist nicht interessant *wenigstens nicht für mich weil die Zahlen die höher als zehn sind wenn es nicht gerade fünfundsiebzig oder so etwas ist nicht interessant ausschauen und bestimmt ist der Unterschied nicht groß wenn man höher als hundert geht, natürlich ist da einer aber auch wieder nicht.*

Die Königin war in ihrem Salon und aß Honig auf Broten der König war in seinem Zahlraum und zählt seine Banknoten.

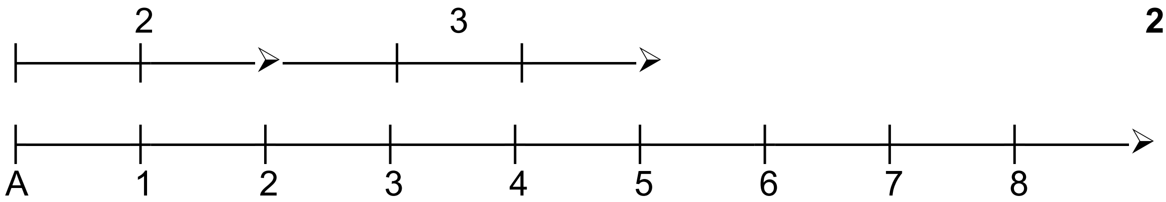
Zählen ist die Religion dieser Generation, es ist ihre Hoffnung und ihre Rettung.

Es ist mühsam, nicht das zählen, jeder kann zählen, selbst wenn man wie die spanischen Frauen und die Chinesen mit Kieselsteinen zählt was mühsam ist ist Religion und wenn zählen zur Religion wird wird es mühsam. (Aus: Gertrude Stein (1874-1946), Jedermanns Autobiographie, s.a. Peter Handke, Die Wiederholung S.45)

1.2 ADDITION UND SUBTRAKTION

Addieren heißt, von einer bestimmten Zahl um eine bestimmte Zahl weiterzählen. 2 + 3 bedeutet, dass man von der Zahl 2 aus um 3 Einheiten weiterzählt. Man gelangt auf diese Weise zur Zahl 5.

2 + 3 = 5



2 und 3 heißen dabei SUMMANDEN, der Ausdruck 2 + 3 heißt SUMME.

Gesetze für die Addition:

KOMMUTATIVGESETZ (Vertauschungsgesetz):

$2 + 3 = 3 + 2$ allgemein: $a + b = b + a$

In einer Summe dürfen die Summanden vertauscht werden, ohne dass sich der Wert der Summe ändert.

ASSOZIATIVGESETZ (Verbindungsgesetz):

$2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$; allgemein: $a + (b + c) = (a + b) + c$

In einer Summe dürfen die Summanden beliebig zu Teilsummen verbunden werden.

IMMER GILT: **WAS IN KLAMMERN STEHT, WIRD ZUERST AUSGERECHNET.**

****
ÜBUNGEN
****

Rechnen Sie vorteilhaft:

a) $421 + (79 + 112) =$ b) $(516 + 272) + 28 =$

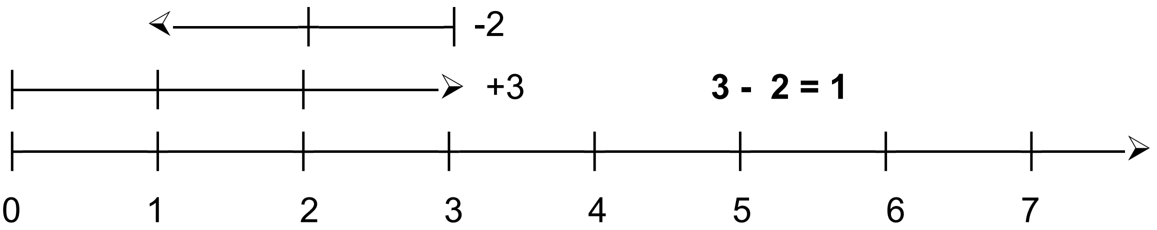
c) $36 + (28 + 6) =$ d) $918 + (82 + 573) =$

Zu jeder natürlichen Zahl (z.B. 2) definiert man eine <u>Gegenzahl</u> (z.B. -2), so dass die Summe von beiden Zahlen 0 ist: 2 + (-2) = 0
0 ist das <u>neutrale Element</u> bezüglich der Addition: 3 + 0 = 3.

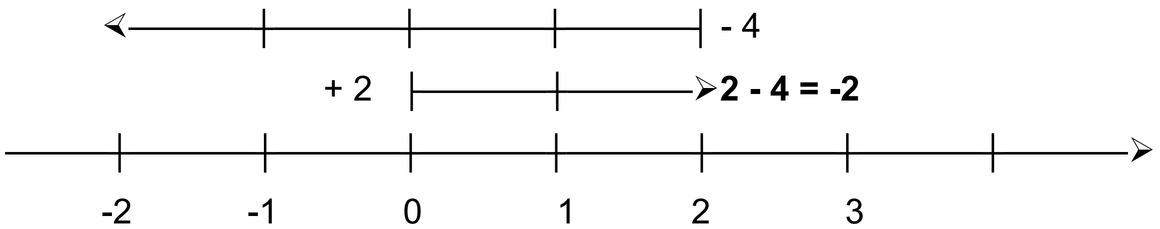
Die Subtraktion ist eine abgekürzte Schreibweise für die Addition der Gegenzahl.

2 + (-2) = 2 - 2 allgemein: a + (-b) = a - b

Die negativen Zahlen unterscheiden sich von den positiven nur durch das Vorzeichen.
Die Subtraktion kann man so darstellen, dass man die Länge der Pfeile beibehält, aber die Richtung ändert.



Zieht man von einer Zahl eine gleich große oder größere Zahl ab, dann gibt es kein Ergebnis unter den natürlichen Zahlen. Die Grundmenge, auf der wir rechnen, muss deshalb um 0 und die negativen Zahlen erweitert werden.



Positiv, bitte

Die neue Zahlenmenge ist die Menge der GANZEN ZAHLEN. Sie umfasst alle natürlichen Zahlen und zusätzlich die NULL und die NEGATIVEN ZAHLEN.

Die NULL ist das „neutrale Element“ der Addition:
3 + 0 = 3, die Addition der Null verändert eine Zahl nicht.

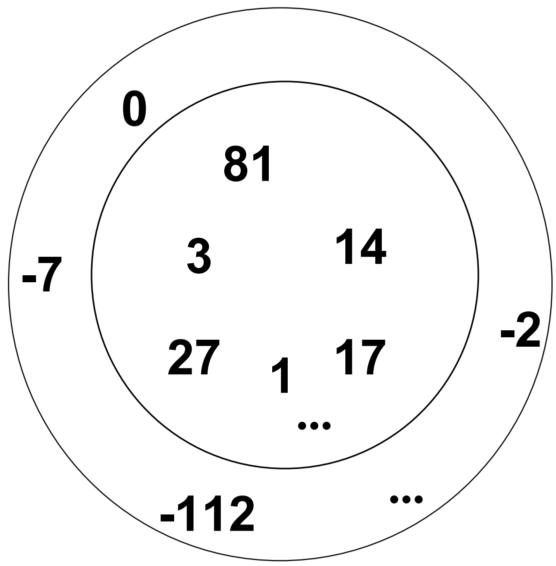
NULL-BOCK. NULL-RUNDE.
„DU BIST EINE NULL.“
Aufgeblasene Nullen

Reduzieren Sie sich wieder auf Null, auf nichts, und Sie werden die Wahrheit erkennen!

Ein indischer Professor

Als Grenze zwischen allen positiven und negativen Größen, als einzige wirklich neutrale Zahl, die weder + noch - sein kann, ist die Null nicht nur eine sehr bestimmte Zahl, sondern auch an sich wichtiger als alle andern von ihr begrenzten Zahlen. Null ist in der Tat inhaltsvoller als jede andre Zahl...

Engels, Dialektik der Natur, S.523



Menge der ganzen Zahlen